Bibliographie.

R. Courant—D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, zweiter Band (Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 48), XVI+549 S. mit 57 Abbildungen, Berlin, J. Springer, 1937.

Dieser zweite Band enthält in sieben Kapiteln eine systematische Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Hat sich der eigentliche Verfasser, COURANT auch auf die bezüglich der Physik wichtigen Gesichtspunkte beschränkt, Vollständigkeit konnte er auf diesem Riesengebiet noch immer nicht erstreben. So hat er vorzugsweise Gegenstände diskutiert, bei welchen er in der Sache oder in der Form der Darstellung beitragen konnte.

Dies gilt besonders vom letzten, an den ersten Band anschließenden Kapitel, in welchem COURANT die Lösung der Rand- und Eigenwertprobleme selbstadjungierter elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei zwei unabhängigen *Veränderliehen auf Grund der Hilbertschen direkten Methoden der Variationsrechnung* behandelt. Und zwar in Weiterführung seiner früheren Arbeiten, die neueren Untersuchungen von FRIEDRICHS und RELLICH über lineare Operatoren im Hilbertschen Raume berücksichtigend. Dieses Kapitel enthält auch die Courantsche Lösung des Plateauschen Problems über die Existenz von Minimalflächen bei einfachster Randkurve.

Auf die übrigen originellen Beiträge kann in der folgenden Aufzählung nur stellenweise hingewiesen werden.

Nach einem vorbereitenden, die Grundbegriffe bis zum Cauchy—Kowalewskaschen Existenzsatz analytischer Lösungen analytischer Differentialgleichungen enthaltenden Kapitel, bringt Kapitel II die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im klassischen Umfang. Sehr eingehend wird die Hamilton—Jacobische Theorie, ihr Zusammenhang mit der klassischen Variationsrechnung und den kanonischen Transformationen dargestellt.

Kapitel III gibt zunächst die Klasseneinteilung linearer (und quasilinearer) Differentialgleichungen und — was hervorgehoben werden mag — linearer Systeme erster Ordnung. Dann wird die Struktur der Lösungen, ihre Zusammensetzung aus einzelnen Elementarvorgängen untersucht und an einigen Anfangswert- und Ausstrahlungsproblemen bzw. Ausbreitungsvorgängen beleuchtet. Hier findet sich eine breite Besprechung der typischen Differentialgleichungsprobleme der Physik, sowie — im Anhang — eine eingehende Diskussion der Ausgleichsprobleme und zwar sowohl mit Hilfe einer Integraldarstellung, als auch einer rein symbolischen (Heavisideschen) und durch die Laplace-Transformation begründeten Operatorenmethode.

Kapitel IV enthält fast ausschließlich eine Darstellung der an die Laplacesche bzw. Poissonsche Gleichung sich anschließenden Potentialtheorie, aus welcher eine neue, wesentliche Verallgemeinerung der Umkehrung des Mittelwertsatzes hervorgehoben werden kann.

Wesentlich eingehender werden im V. und VI. Kapitel die Schwingungen und Ausbreitungsvorgänge umfassenden hyperbolischen Gleichungen behandelt. Im V. solche mit zwei, im VI. jene mit mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Kapitel V beleuchtet erneuert den Charakteristikenbegriff von verschiedenen Seiten, gibt dann Grundsätzliches über Ausbreitungsvorgänge, um die linearen Differentialgleichungen mit der Riemannschen, jene von der Gestalt $u_{xy}=f(x, y, u, u_x, u_y)$ bzw. die entsprechenden Systeme mit der Picardschen Methode und schließlich die allgemeinen nach H. Lewys und K. Friedrichs' neuesten Ausführungen zu behandeln bzw. die Analytizität der Lösungen von elliptischen Gleichungen bei zwei unabhängigen Veränderlichen zu beweisen.

Besonders reichhaltig ist das — mehr als ein Fünftel des Bandes bildende — VI. Kapitel. Eine entsprechend erweiterte Charakteristikentheorie gibt hier zunächst die Grundlage zu einer mathematisch haltbaren Darstellung und mit Beispielen reich belegten Besprechung physikalischer Begriffsbildungen, wie jene der Wellenfronten, der Ausbreitung, der Strahlen, des Eikonals, des Huygensschen Prinzips bzw. Konstruktion von Wellenfronten. Dann folgen die Sätze über Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet bei Anfangsproblemen so, wie sie sich nach Zarembas ursprünglichen und neulich von RUBINOVICZ, FRIEDRICHS und H. LEWY erweiterten Methode auf mehr als zwei unabhängige Veränderliche übertragen lassen. Wird nun bei der expliziten Lösung des Anfangswertproblems hyperbolischer linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, sowie bei der Behandlung der Wellen- und Darbouxschen Gleichung mit der Mittelwertmethode, wie endlich bei der Lösung ultrahyperbolischer Differentialgleichungen und allgemeiner Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch einen neuen Mittelwertsatz von ASGEIRSSON die Charakteristikentheorie zurückgestellt, so kommt sie bei der — vereinfacht und besonders klar dargestellten — Hadamardschen Methode als Vertiefung und Verallgemeinerung der in Kapitel V behandelten Riemannschen wieder zur vollen Geltung.

Reiche Literaturnachweise am Schluß der einzelnen Kapitel bestärken den Eindruck, daß in dem — nun abgeschlossenen — Werke nicht ein abgeklärtes Lehrbuch eines erstarrten Wissensgebietes, sondern ein besonders wertvoller, anregend lebendiger Wegweiser innerhalb eines unerschöpflichen, immer neue Schätze darbietenden Forschungsgebietes vorliegt. Würdig den Verfassern, denen als Meister bzw. Schüler Idee und Gestaltung zu verdanken sind.

T. v. Szentmártony (Stachó).

Charles N. Moore, Summable series and convergence factors (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXII), VI + 105 pages, New York, American Mathematical Society, 1938.

All methods for summing a divergent series $\sum u_n$ which have come into general use are essentially "convergence factor" methods, that is, the sum is defined as

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} [u_0 f_0(\alpha) + u_1 f_1(\alpha) + \ldots],$$

the "convergence factors" $f_0(\alpha)$, $f_1(\alpha), \ldots$ satisfying to appropriate conditions. Convergence factors $f_n(\alpha)$, which transform convergent series into convergent ones are designated as factors of type I; factors that may be used to obtain the sum of a series are of type II.

The aim of the present work is to give a systematic treatment of convergence factor theorems. Both types of convergence factors are considered, and the theory is developed for multiple series of any order as well as for simply infinite series. Through the use of Nörlund means in place of Cesàro means, the theory developed is considerably more general than that found in the existing literature.

At the end of the book there is a bibliography including 165 papers on this subject.

Béla de Sz. Nagy.

Francis Perrin, Mécanique statistique quantique, 224 pages, Paris, Gauthiers-Villars, 1939.

Le présent livre est une contribution importante à la mécanique statistique quantique. Il se compose de trois parties. La première s'occupe des problèmes de la mécanique continue aléatoire, savoir de la probabilité en mécanique classique, des systèmes ergodiques, des systèmes couplés avec un thermostat, des gaz parfaits et pour terminer, de la théorie ondulatoire continue du rayonnement isotherme.

La deuxième partie analyse la quantification des systèmes mécaniques, la mécanique ondulatoire, la statistique classique des systèmes quantifiés, la quantification des ondes lumineuses, la formule de Planck et enfin la chaleur spécifique des solides.

La troisième partie, la plus importante du livre, est consacrée à la statistique quantique des systèmes indiscernables. L'auteur donne un exposé clair et détaillé des statistiques diverses: classique, de Bose–Einstein, de Fermi–Dirac, de Léon Brillouin et de Planck–Allard. Il montre qu'on peut trouver dans la théorie statistique des éléments ayant les caractères des grandeurs thermodinamiques: température, chaleur et entropie. Les deux premiers principes de la thermodynamique résultent de la seule hypothèse de la constitution corpusculaire de la matière; le principe de Nernst est essentiellement lié au caractère quantique des lois qui régissent les particules élémentaires.

Pour mettre en évidence les caractères essentiels des gaz matériels régis par les nouvelles statistiques, des gaz matériels simples sont étudiés. L'auteur montre combien respectivement la faible et la forte dégénérescence modifient le comportement du gaz dans les statistiques de Bose et Fermi. Il examine ensuite le cas où le gaz est soumis à un champ extérieur. Il étudie le paramagnétisme d'un gaz électronique et l'atome de Thomas–Fermi. Il étudie ensuite la cinétique statistique des particules discernables et indiscernables, l'équilibre thermique et l'évolution d'un état quelconque. Il démontre que l'entropie d'un gaz qui evolue en restant isolé à partir d'un état quelconque croît sans cesse et tend vers le maximum qui correspond à l'état d'équilibre.

L'auteur fait très bien de baser la discussion des statistiques quantiques sur la mécanique ondulatoire et cela en soulignant leur relation étroite à la dualité „onde — corpuscule".

Nous félicitons l'auteur sur cette excellente introduction à l'étude de la mécanique statistique quantique dont on ne saurait trop conseiller la lecture à tous ceux qui s'intéressent aux méthodes et aux résultats de la mécanique moderne.

Coloman Széll.

Louis de Broglie, La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules, 223 pages, Paris, Gauthiers-Villars, 1939.

Dans le présent volume, le savant auteur expose la théorie en question, en commençant par le cas général des ensembles de corpuscules en interaction et en dérivant comme cas particulier le cas d'un seul corpuscule.

Voici le programme du livre:

Après avoir rappelé les résultats de la mécanique classique qui servent de base de celle ondulatoire, on fait le passage à celle-ci et l'on développe les principes généraux de la mécanique ondulatoire des systèmes, en particulier les différentes lois de conservation.

Tel est le sujet des 3 premiers chapitres. Le quatrième est consacré à la théorie du centre de gravité en mécanique ondulatoire, théorie à peine effleurée dans la plupart des ouvrages.

Chapitre V s'occupe à titre d'exemple de quelques problèmes particuliers.

Chapitre VI donne un aperçu sur les méthodes de perturbation qui jouent un grand rôle dans notre théorie.

Dans les trois derniers chapitres l'auteur étudie les systèmes contenants des particules de même nature physique. Pour étudier ces systèmes, la mécanique ondulatoire a été amenée à introduire le principe d'exclusion de PAULI. L'auteur y traite deux cas suivant que les particules sont dénuées de spin ou non. Dans le dernier chapitre il est question entre autres des noyaux des atomes.

En résumé, le présent livre expose très clairement les problèmes de la mécanique ondulatoire et sert d'excellente introduction.

Coloman Széll.

Béla v. Sz. Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, fünfter Band, Heft 5), IV + 80 S., Berlin, J. Springer, 1942.

Das vorliegende Heft beschränkt sich keineswegs auf das im Titel genannte zentrale Problem, sondern gibt eine bis auf Einzelheiten ausgeführte, gründliche, leicht lesbare Darstellung der Hauptprobleme der Theorie des Hilbertschen Raumes; was fehlt, sind sozusagen nur die Vorgeschichte und die Anwendungen. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung auf 80 Seiten ist der in den beiden letzten Jahrzehnten erfolgten Axiomatisierung und der im Anschluß hieran ins Werk gesetzten Vereinfachung der Methoden zu verdanken, an der auch der Verfasser regen Anteil hat. So z. B. stammt von ihm der auf die Verunendlichfachung des H. Raumes gegründete Beweis, daß man aus jeder beschränkten Menge linearer Transformationen des (separablen) H. Raumes eine überall dichte Teilfolge auswählen kann, ferner vereinfachte Beweise des Neumannschen Satzes über Funktionen einer selbstadjungierten oder normalen Transformation, der Stoneschen und verwandten Sätze über Gruppen und Halbgruppen von Transformationen, sowie Vereinfachung der Störungstheorie.

F. R.